

28.11.23

Fin exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spc}(A) = \{-2, 1\}$$

↑
valeur propre double

↑
val. propre simple

$$E_1 = \text{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_1} \right\}$$

$$\dim(E_1) = 1$$

$$E_{-2} = \text{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_3} \right\}$$

$$\dim(E_{-2}) = 2$$

$\Rightarrow A$ est diagonalisable

en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

↑
 b_1

↑
 b_2, b_3

et en calculant $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

on a l'égalité

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A = P D P^{-1} =$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

et cette expression permet de calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ Alors on

$$A^k = \underbrace{(P D P^{-1})^k}_{k \text{ fois}} = (P D P^{-1}) \cdots (P D P^{-1})$$

$$A^k = P D^k P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

calcul $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-d & 1-d \\ d-1 & 2d-1 & d-1 \\ 1-d & 1-d & 1 \end{pmatrix}$$

posons $d = (-2)^k$

Micro-résumé sur la diagonalisation

1) $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ donnée.

$$B = (b_1, \dots, b_n)$$

A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base[↑] de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A

comme b_i est vecteur propre de A , il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$$\text{on a } Ab_i = \lambda_i b_i \quad \forall i=1, \dots, n$$

$$\text{Preons } P = (b_1 | \dots | b_n) \quad (P \text{ inversible})$$

déf. prod. mat.

$$AP = A(b_1 | \dots | b_n) \stackrel{\downarrow}{=} (Ab_1 | Ab_2 | \dots | Ab_n)$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} (\lambda_1 b_1 | \lambda_2 b_2 | \dots | \lambda_n b_n) = \underbrace{(b_1 | \dots | b_n)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_D$$

$Ab_i = \lambda_i b_i$

$$\Rightarrow AP = PD \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}AP = D$$

Exemples:

Matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$

1) symétries $S^2 = I_n$

2) projections $P^2 = P$

Matrices non diagonalisables sur $\mathbb{R}$

1) rotations d'angle θ (avec $\theta \neq k\pi$)

$$C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

mais C est diagonalisable sur $\mathbb{C}$

(en effet C possède 2 val propres complexes distinctes
si $\theta \neq k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$)

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ non diag sur $\mathbb{R}$
ni sur $\mathbb{C}$.

$$c_A(t) = -t^3$$

$$\text{Spec}(A) = \{0\}$$

↖ triple

$$E_0 = \ker(A)$$

$$\dim(E_0) = 1 \neq 3$$

pas diagonalisable

exo 1 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$
pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$

$$C_J(t) = t^2 + 1 \quad \text{irred. sur } \mathbb{R}$$

$$= (t-i)(t+i) \quad \text{factorisation sur } \mathbb{C}$$

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \{\pm i\}$$

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(J) = \emptyset$$

$$E_i = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_{-i} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1} J P = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

exo 2 (pour ceux qui le veulent)

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{diagonaliser } F.$$

F n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{Q}$

est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

(Fin
Chap 5)

Chap. 6 : orthogonalité et méthode des moindres carrés

(Lay p. 354-410)

Motivation:

Pour $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ (ou $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$)

et pour $b \in \mathbb{R}^m$

l'équation $Ax^* = b$ (ou $T(x) = b$)

ne possède pas toujours une solution $x \in \mathbb{R}^n$

($*$ possède une solution $\Leftrightarrow \begin{matrix} b \in \text{Im}(A) \\ b \in \text{Im}(T) \end{matrix}$)

du coup on cherche le(s) $x \in \mathbb{R}^n$

tg $Ax - b$ soit le plus proche

du vecteur nul $0 \in \mathbb{R}^m$

Pour cela on a besoin d'une notion de "distance"
entre vecteurs de $\mathbb{R}^n$, "longueur"

§6.1 : Produit scalaire, longueur et orthogonalité dans $\mathbb{R}^n$

Def : $n \in \mathbb{N}$ fixé $n \geq 1$. Pour $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{on pose}$$

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \underline{\text{le produit scalaire de } u \text{ et } v}$$

$(u \cdot v \in \mathbb{R})$

Autres notations :

$$u \cdot v = (u|v) = \langle u|v \rangle = \langle u, v \rangle$$

Rem : Si $u, v \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$

sont vues
comme matrices
colonnes

alors

$$u \cdot v = u^T \cdot v$$

$\begin{matrix} \textcolor{green}{M_{1 \times n}(\mathbb{R})} \\ \downarrow \\ \textcolor{green}{M_{n \times 1}(\mathbb{R})} \end{matrix}$

↑
produit matriciel

en effet :

$$u^T = (u_1 \dots u_n)$$

$$\text{et } u^T v = (u_1 \dots u_n) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

Propriétés :

Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

1) $u \cdot v = v \cdot u$ (le prod. scalaire est symétrique)

2) $(u+v) \cdot w = (u \cdot w) + (v \cdot w)$

3) $(\lambda u) \cdot v = \lambda (u \cdot v) = u \cdot (\lambda v)$

4) $u \cdot u \geq 0$

5) $u \cdot u = 0 \iff u = 0_{\mathbb{R}^n}$

Rem : 2) & 3) dit que pour $w \in \mathbb{R}^n$ fixé
alors la transformation

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \mapsto v \cdot w$$

est une transformation linéaire.

Déf : Pour $v \in \mathbb{R}^n$ on pose $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

1) et on l'appelle la norme de v
la longueur de v

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

et banalement $\|v\|^2 = v \cdot v$

ex: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

alors $\|v\| = \sqrt{1^2 + \dots + 1^2} = \sqrt{n}$

2) Pour $u, v \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$d(u, v) := \|u - v\| \geq 0$$

et on appelle la distance entre u et v (dans $\mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \sqrt{(u - v) \cdot (u - v)} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2} \end{aligned}$$

Rem: $d(u, 0) = \|u\|$.

Rem: $d(u, v)$ généralise la notion de distance
1) dans $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

2) On a $d(u, v)^2 = (u - v) \cdot (u - v)$

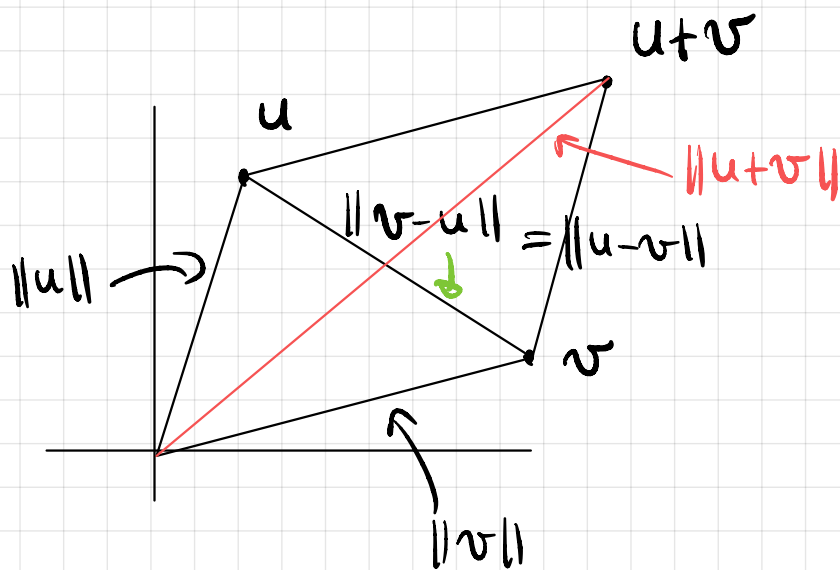
PS $\searrow$
 $= u \cdot u - u \cdot v - v \cdot u + v \cdot v$

$$d(u, v)^2 = u \cdot u - 2u \cdot v + v \cdot v$$

$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2$

 $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$

Dessin dans $\mathbb{R}^2$



géométriquement
 u et v
sont perpendiculaires
(orthogonaux)
 $\hat{u}_1$ et seul. $\hat{u}_1$

$$\|u - v\| = \|u + v\|$$

ou de façon équiv. u et v sont perpend.

$$\Leftrightarrow d(u, v) = d(u, -v)$$

$$\Leftrightarrow d(u, v)^2 = d(u, -v)^2$$

Rem
 $\|v\| = \|-v\|$

$$\Leftrightarrow \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2 = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2$$

$$\Leftrightarrow 4(u \cdot v) = 0 \quad \Leftrightarrow u \cdot v = 0$$

Donc, dans $\mathbb{R}^2$, u et v sont orthogonaux

$$\Leftrightarrow u \cdot v = 0$$

Cela motive la

Définition: (Orthogonalité dans $\mathbb{R}^n$)

$u, v \in \mathbb{R}^n$ sont orthogonaux s/ $u \cdot v = 0$
 (perpendiculaires) (per def)

On écrit $u \perp v$ dans ce cas.

ex: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u \perp v$
 dans $\mathbb{R}^5$

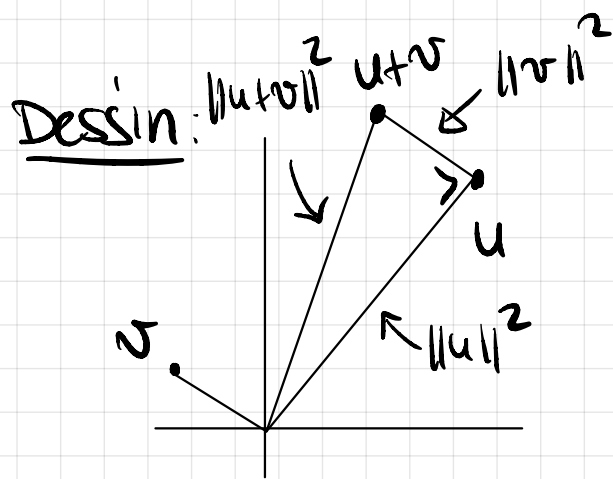
Théorème de Pythagore dans $\mathbb{R}^n$:

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ alors

$$u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

dém: $\|u+v\|^2 = (u+v) \cdot (u+v) = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2$

qfd.



ex: $u, v \in \mathbb{R}^2$ comme avant

$$\|u\| = \sqrt{3} \quad \|v\| = \sqrt{2}$$

$$\|u+v\| = \sqrt{5}$$

Rem: Plus généralement (dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$)
on a

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos(\theta)$$

où θ est l'angle formé par u et v
et cette dernière découle de la loi du cosinus (ou Thm d'Al Kharchi):

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|\cos(\theta)$$

(loi du cos)

Propriétés de la norme dans $\mathbb{R}^n$

Théorème:

a) $\|u\| \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$ et $u=0 \Leftrightarrow \|u\|=0$

b) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
(en particulier $\|u\| = \|-u\|$)

c) $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$

(Inégalité de Cauchy-Schwarz)

d) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

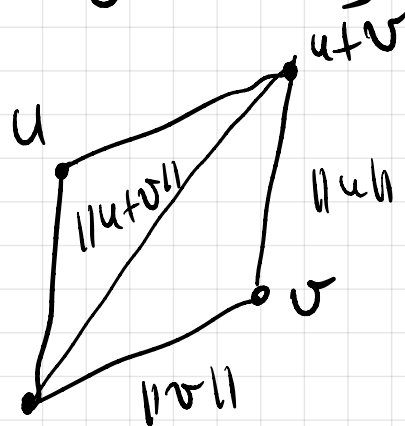
(Inégalité triangulaire)

Morale de d)

c'est plus court

d'aller de 0 à $u+v$

que de passer par u ou v



Morale de c) (CS)

$$u, v \in \mathbb{R}^n$$

$$c) \text{ dit que } |u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

si $u \neq 0$
et $v \neq 0$ alors $\|u\| \neq 0$ et $\|v\| \neq 0$

$$CS \iff \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

car
 $\|u\| > 0$
 $\|v\| > 0$

$$\iff -1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

Cela permet de définir l'angle entre u et v
comme étant $\theta \in [0, \pi]$ t.q

$$\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$$

(de sorte que $\theta = \arccos\left(\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}\right)$)

on a donc $u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cos(\theta)$

(avec θ comme
ci-dessus)

Rem: u et v
sont colinéaire $\Leftrightarrow \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \|v\|} = 1$

$$\Leftrightarrow |u \cdot v| = \|u\| \cdot \|v\|$$

ex: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \theta = \pi$

$$u \cdot v = -6 \quad \|u\| = \sqrt{6} = \|v\|$$

Def: la valeur $\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$

s'appelle le coefficient de corrélation linéaire
entre u et v

Def: soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un s-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

On définit l'orthogonal de W , comme

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot w = 0 \quad \forall w \in W\}$$

ainsi $W^\perp$ est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$
qui sont perpendiculaires / orthogonaux
à tous les vecteurs de W

Théorème (orthogonal d'un espace)

Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel

0) Si $W = \text{Vect}\{w_1, \dots, w_p\}$ avec $w_i \in W$

alors $v \in W^\perp \iff v \perp w_i \quad \forall i = 1, \dots, p$

(càd $\iff v \cdot w_i = 0 \quad \forall i$)

1) $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

2) $W \cap W^\perp = \{0\}$ et $(W^\perp)^\perp = W$

$$3) \dim(W) + \dim(W^\perp) = n$$

4) Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ alors

$$\text{Ker}(A) \stackrel{\simeq}{=} (\text{Lgn}(A))^\perp$$

$$\& \text{Ker}(A^T) = (\text{Im}(A))^\perp$$

Rem: Dans $\simeq$ l'espace $\text{Lgn}(A)$
est à considérer comme sous-espace de $\mathbb{R}^n$.